evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt:	MO-ME-N-T MOderní MEtody s Novými Technologiemi
Reg.č.:	CZ.1.07/1.5.00/34.0903
Operační program:	Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Škola:	Hotelová škola, Vyšší odborná škola hotelnictví a turismu a Jazyková škola s právem státní jazykové zkoušky Poděbrady
Tematický okruh:	Logaritmická funkce
Jméno autora:	Mgr. Karel Lhotský
Datum:	31. srpna 2013
Ročník:	2. ročník HŠ
Anotace:	Učební materiál určený nejen k výkladu v hodinách matematiky, ale především k samostudiu, popřípadě k samostatnému opakování a procvičování učiva

Logaritmická funkce

$$f:\ y = \log_a x$$

Exponenciální funkce f: $y = a^x$ je pro $a \neq 1$ definovaná v množině R, kterou zobrazuje na interval $(0;+\infty)$.

Pro $a > 1$ je funkce rostoucí v $D(f)$.

Pro $0 < a < 1$ je funkce klesající v $D(f)$.

Proto k ní existuje v množině R inverzní funkce f^{-1}, která má definiční obor $(0;+\infty)$ a jejíž obor hodnot je R.

Tuto funkci označujeme $y = \log_a x$ a čteme „logaritmus o základu a čísla x“.

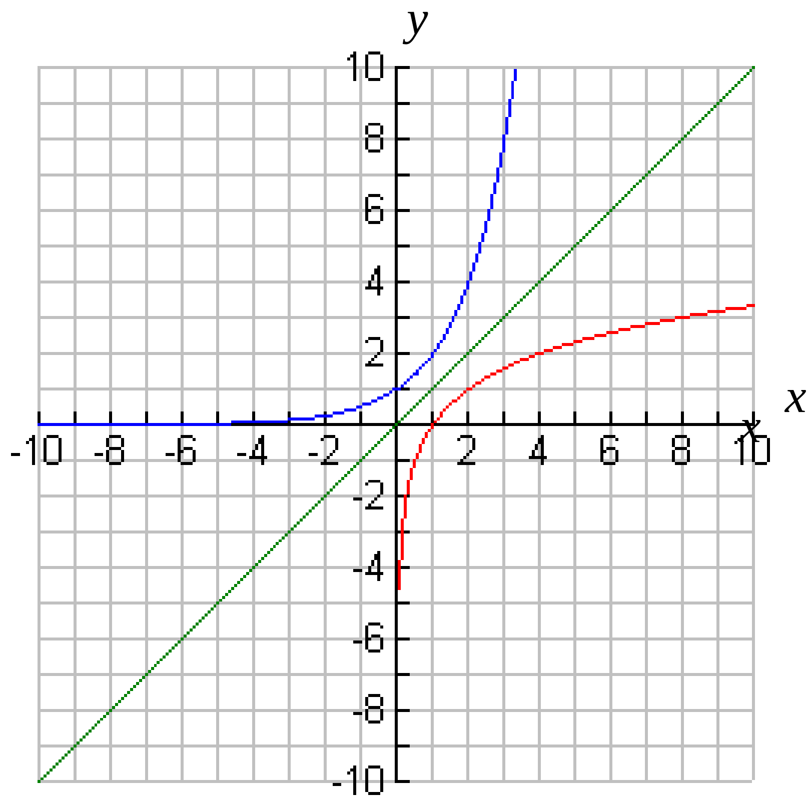
Grafy obou funkcí jsou souměrně sdružené podle osy $y = x$.

$a > 1$ (např. $a = 2$)

f: $y = 2^x$

f^{-1}: $y = \log_2 x$

g: $y = x$

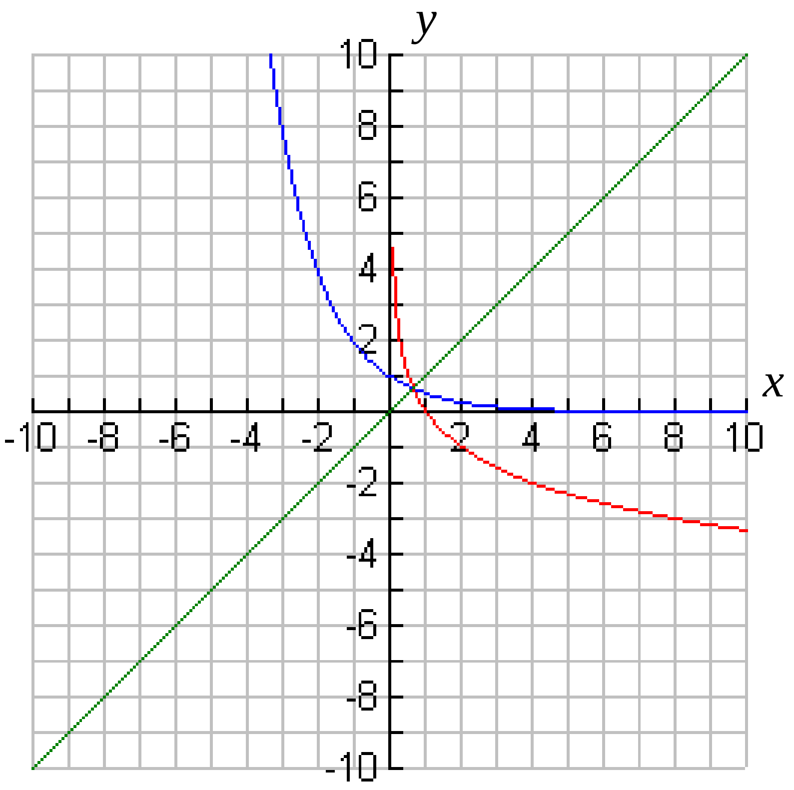


$0 < a < 1$ (např. $a = 0{,}5$)

$f\colon y = a^x$

$f^{-1}\colon y = \log_a x$

$g\colon y = x$



Definice logaritmu

Logaritmus o základu a čísla x je exponent, na který musíme umocnit základ a, abychom získali logaritmované číslo x.

$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

$x > 0, a > 0, a \neq 1, y \in R$

a ... základ logaritmu

x ... logaritmované číslo

y ... logaritmus o základu a čísla x

Příklady

1. $\log_2 8 = 3$.................... $2^3 = 8$
2. $\log_{11} 121 = 2$............. $11^2 = 121$
3. $\log_{10} 1000 = 3$ .... $10^3 = 1000$
4. $\log_7 1 = 0$ .... $7^0 = 1$
5. $\log_4 0{,}25 = -1$ .... $4^{-1} = 0{,}25$
6. $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ .... $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Vlastnosti logaritmů

$\forall a > 0,\ a \neq 1,\ y \in R$:

$\log_a 1 = 0$ ….. $a^0 = 1$

$\log_a a = 1$ ….. $a^1 = a$

$\log_a a^y = y$ ….. $y = \log_a x = \log_a a^y$

Další vlastnosti logaritmů

$u > 0, v > 0, a > 0, a \neq 1, r \in R$

1. $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$
2. $\log_a (u:v) = \log_a u - \log_a v$
3. $\log_a u^r = r \cdot \log_a u$

Důkaz 1.

$\log_a u = p \Leftrightarrow u = a^p$

$\log_a v = q \Leftrightarrow v = a^q$

$\log_a uv = t \Leftrightarrow uv = a^t$

$uv = a^p \cdot a^q = a^{p+q} = a^t \Leftrightarrow p + q = t \Leftrightarrow \log_a uv = \log_a u + \log_a v$

Příklady

1. $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 2 \cdot 3 = \log_6 6 = 1$
2. $\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3(36:4) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$
3. $2\cdot\log_5 10 - 1 = \log_5 10^2 - 1 = \log_5 100 - \log_5 5 = \log_5(100:5) = \log_5 20$
4. $\log_2 8 \cdot \log_3 5 = 3\cdot\log_3 5 = \log_3 5^3 = \log_3 125$
5. $\log_3 9 + \log_2 6 = 2 + \log_2 6 = \log_2 2^2 + \log_2 6 = \log_2 4 + \log_2 6 = \log_2 24$

Logaritmus dekadický - graf

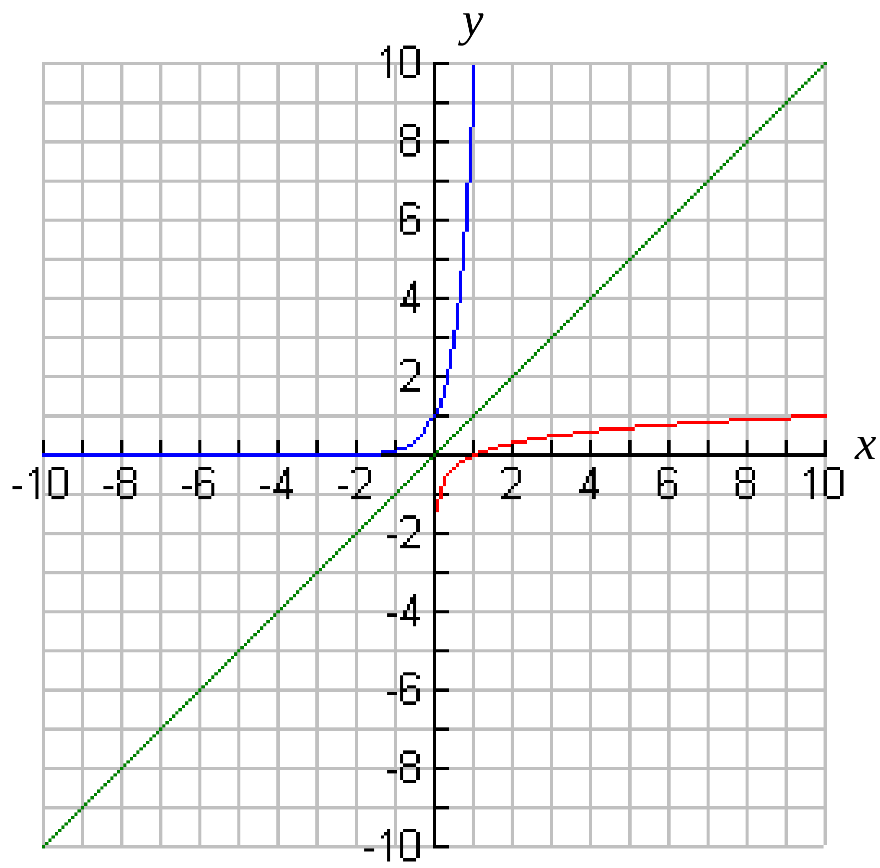
f: $y = 10^{x}$

f^{-1}: $y = \log_{10} x$

g: $y = x$

označujeme:

$\log_{10} x = \log x$



Logaritmus dekadický – výpočet

$\log 2000 = \log(1000 \cdot 2) =$

$= \log 1000 + \log 2 = 3 + 0{,}30103 = 3{,}30103$

Obecně:

$\log a \cdot 10^n = \log 10^n + \log a =$

$= n + \alpha$

n ... charakteristika

α ... mantisa

Logaritmus přirozený

$e = 2{,}718281828\ \ldots$

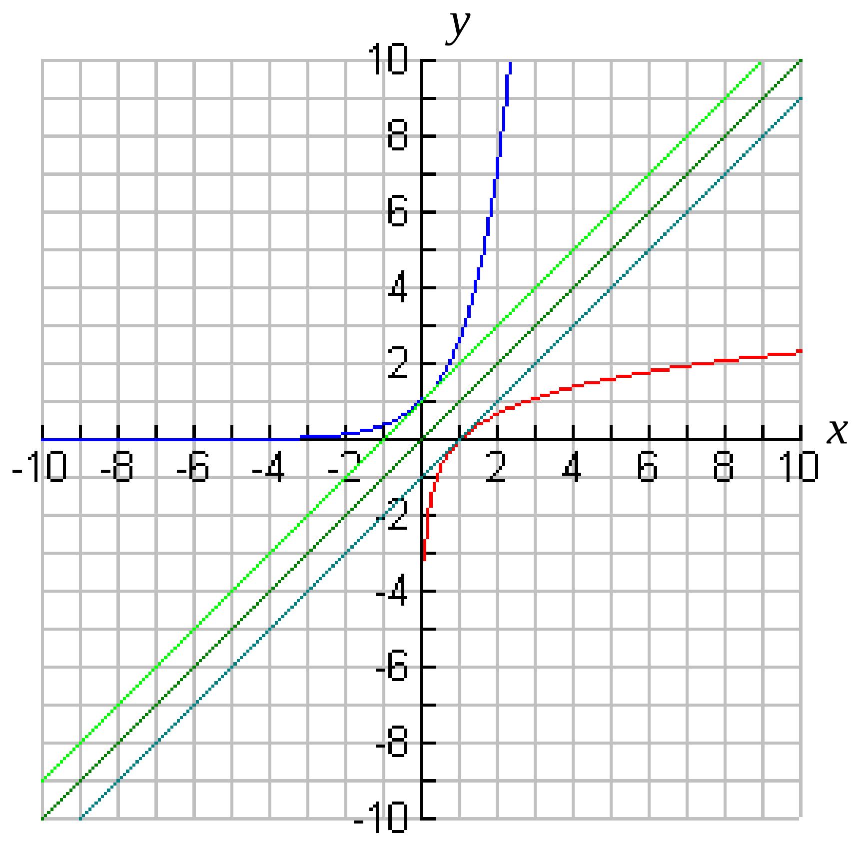
$f\!: y = e^x$

$f^{-1}\!: y = \log_e x$

$g\!: y = x$

označujeme (zpravidla):

$\log_e x = \ln x = \lg x$



Cvičení: Určete číslo $x \in R^+$, jestliže platí (1):

1. $\log_4 x = \log_4 t + \log_4 7$ $\qquad x = 7t$

2. $\log_5 x = \log_5 2a + \log_5 ab^3$ $\qquad x = 2a^2b^3$

3. $\log_3 x = \log_3 15a^5 - \log_3 3a^2$ $\qquad x = 5a^3$

4. $\log x = \log 12y - \log 4y^3$ $\qquad x = \dfrac{3}{y^2}$

5. $\log_8 x = 2 \cdot \log_8 ab + \log_8 3b$ $\qquad x = 3a^2b^3$

Cvičení: Určete číslo $x \in R^+$, jestliže platí (2):

6. $\log_6 x = 5 \cdot \log_6 v - \log_6 11$ $\qquad x = \dfrac{v^5}{11}$

7. $\log_2 x = 3 + \log_2 2a^2$ $\qquad x = 16a^2$

8. $\ln x = 2 - \ln 4$ $\qquad x = \dfrac{e^2}{4}$

9. $\log_9 x = 2 \cdot \left(1 + 3 \cdot \log_9 a\right)$ $\qquad x = 81a^6$

10. $\log x = 3 \cdot \left(2 + 5 \cdot \log_9 ab^2\right)$ $\qquad x = 1000000a^{15}b^{30}$