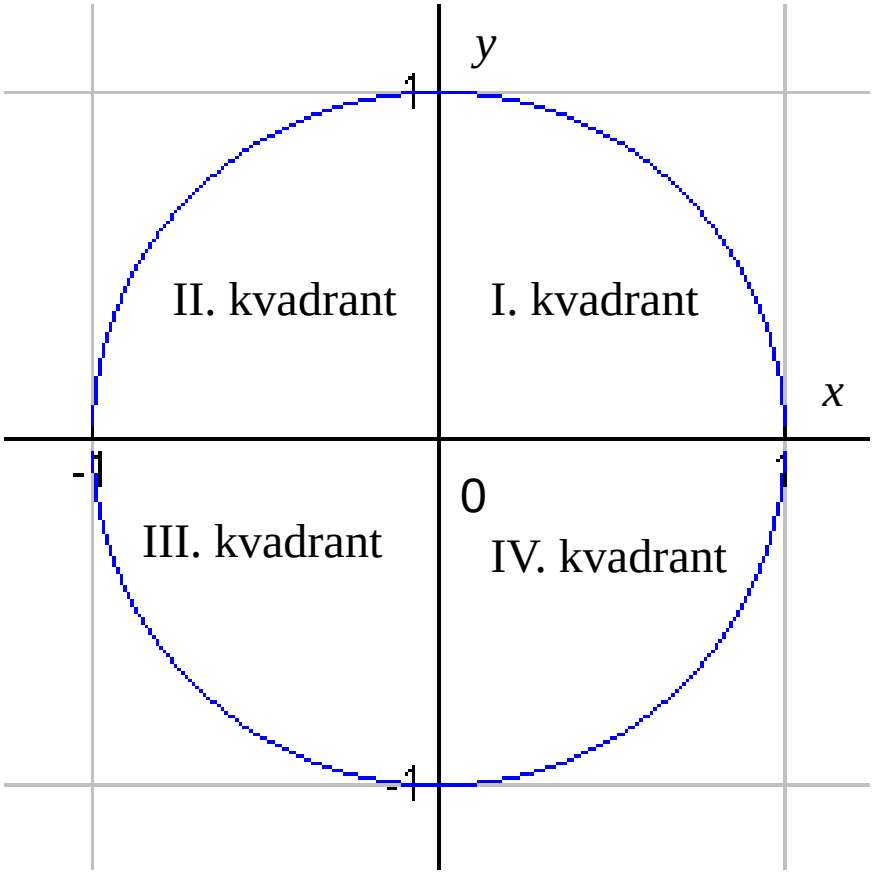
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt:	MO-ME-N-T MOderní MEtody s Novými Technologiemi
Reg.č.:	CZ.1.07/1.5.00/34.0903
Operační program:	Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Škola:	Hotelová škola, Vyšší odborná škola hotelnictví a turismu a Jazyková škola s právem státní jazykové zkoušky Poděbrady
Tematický okruh:	Definice goniometrických funkcí
Jméno autora:	Mgr. Karel Lhotský
Datum:	31. srpna 2013
Ročník:	2. ročník HŠ
Anotace:	Učební materiál určený nejen k výkladu v hodinách matematiky, ale především k samostudiu, popřípadě k samostatnému opakování a procvičování učiva.

Goniometrické funkce

definice

Systém souřadnic pro goniometrické funkce



Kartézská souřadnicová soustava je určena dvěma navzájem kolmými osami x, y.

Přímky x, y rozdělují rovinu na čtyři části, které se nazývají kvadranty.

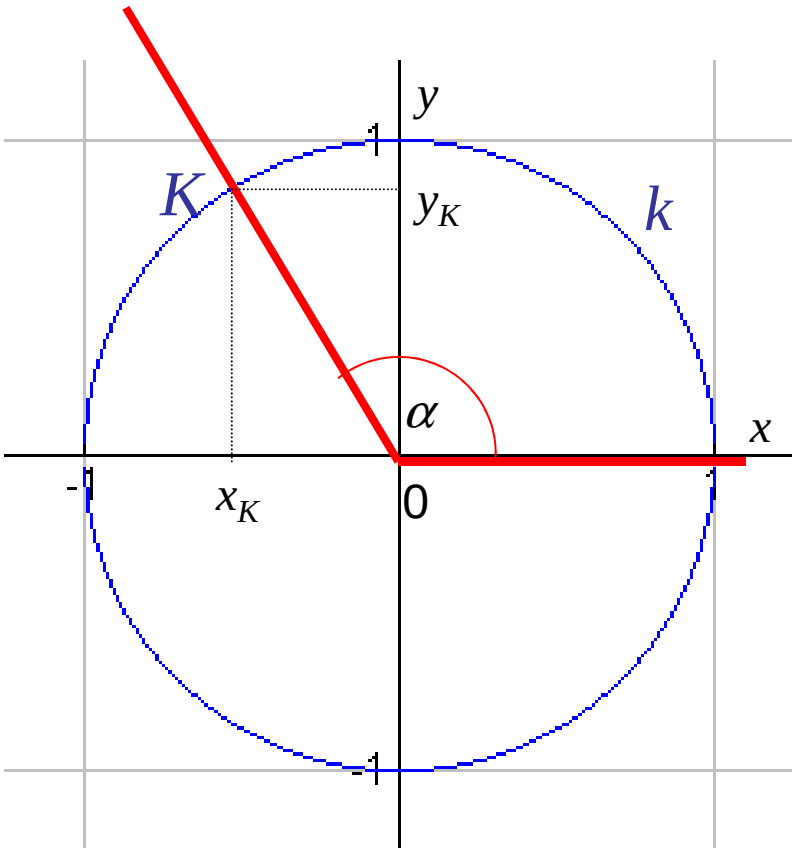
I. kvadrant … $x > 0, y > 0$

II. kvadrant … $x < 0, y > 0$

III. kvadrant … $x < 0, y < 0$

IV. kvadrant … $x > 0, y < 0$

Definice funkcí sinus a kosinus



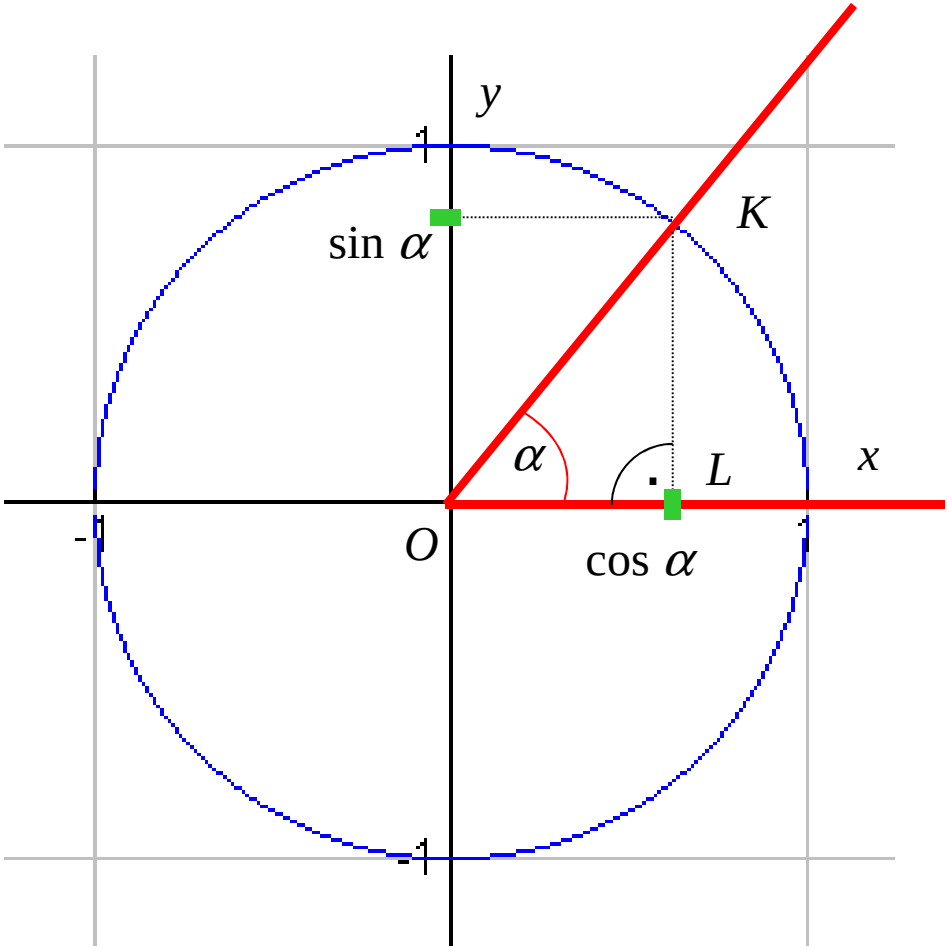
Je dána souřadnicová soustava určená osami *x*, *y* a kružnice *k* se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem jedna (jednotková kružnice).

Orientovaný úhel α umístíme tak, že jeho počáteční rameno je totožné s kladnou poloosou *x*.

Koncové rameno úhlu α protíná kružnici *k* v bodě *K*.

$x_K = \cos \alpha$, $y_K = \sin \alpha$,

Pravoúhlý trojúhelník



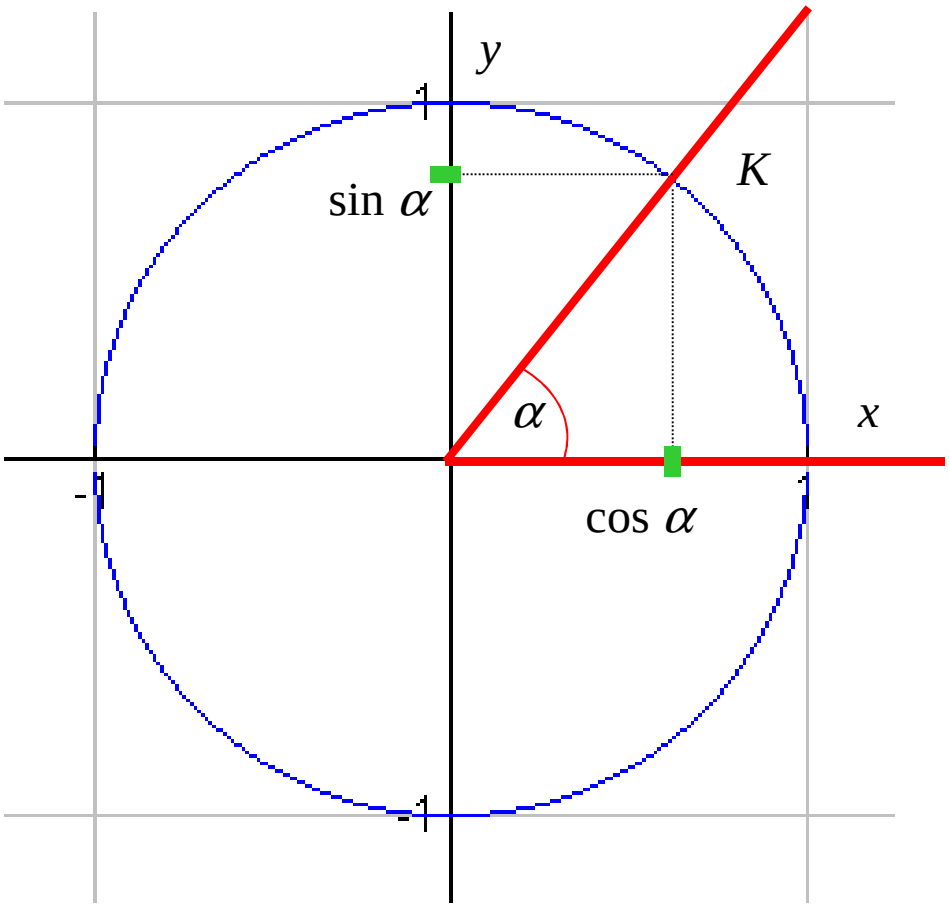
Goniometrické funkce ostrého úhlu jsme dříve definovali pomocí pravoúhlého trojúhelníku.

ΔOKL je pravoúhlý, strana OK je přepona. $|OK| = 1$

$$\sin\alpha = \frac{|KL|}{|OK|} = \frac{|KL|}{1} = |KL| = y_K$$

$$\cos\alpha = \frac{|OL|}{|OK|} = \frac{|OL|}{1} = |OL| = x_K$$

I. kvadrant



$0° < \alpha < 90°$ (ve stupních)

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (v radiánech)

Na obrázku vidíme, že platí:

$\sin \alpha > 0$

$\cos \alpha > 0$

Hodnoty pro daný ostrý úhel α můžeme určit pomocí kalkulačky nebo tabulek.

Hodnoty funkcí sinu a kosinus v II., III. a IV. kvadrantu

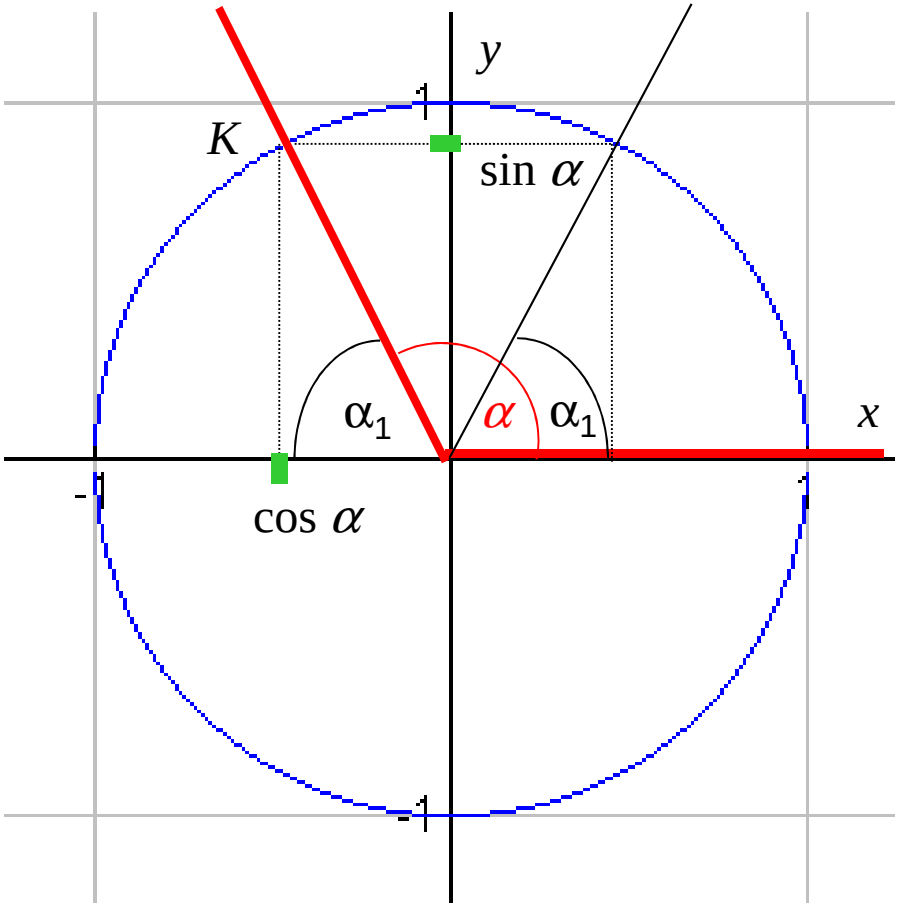
V určování hodnot funkcí sinu a kosinus v II., III. a IV. kvadrantu budeme využívat pomocný ostrý úhel, který označíme α_1.

Platí:

$0° < \alpha_1 < 90°$ (ve stupních)

$0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ (v radiánech)

II. kvadrant



$90° < \alpha < 180°$ (ve stupních)

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (v radiánech)

$\alpha = 180° - \alpha_1$ (ve stupních)

$\alpha = \pi - \alpha_1$ (v radiánech)

$\sin\alpha = \sin\alpha_1$

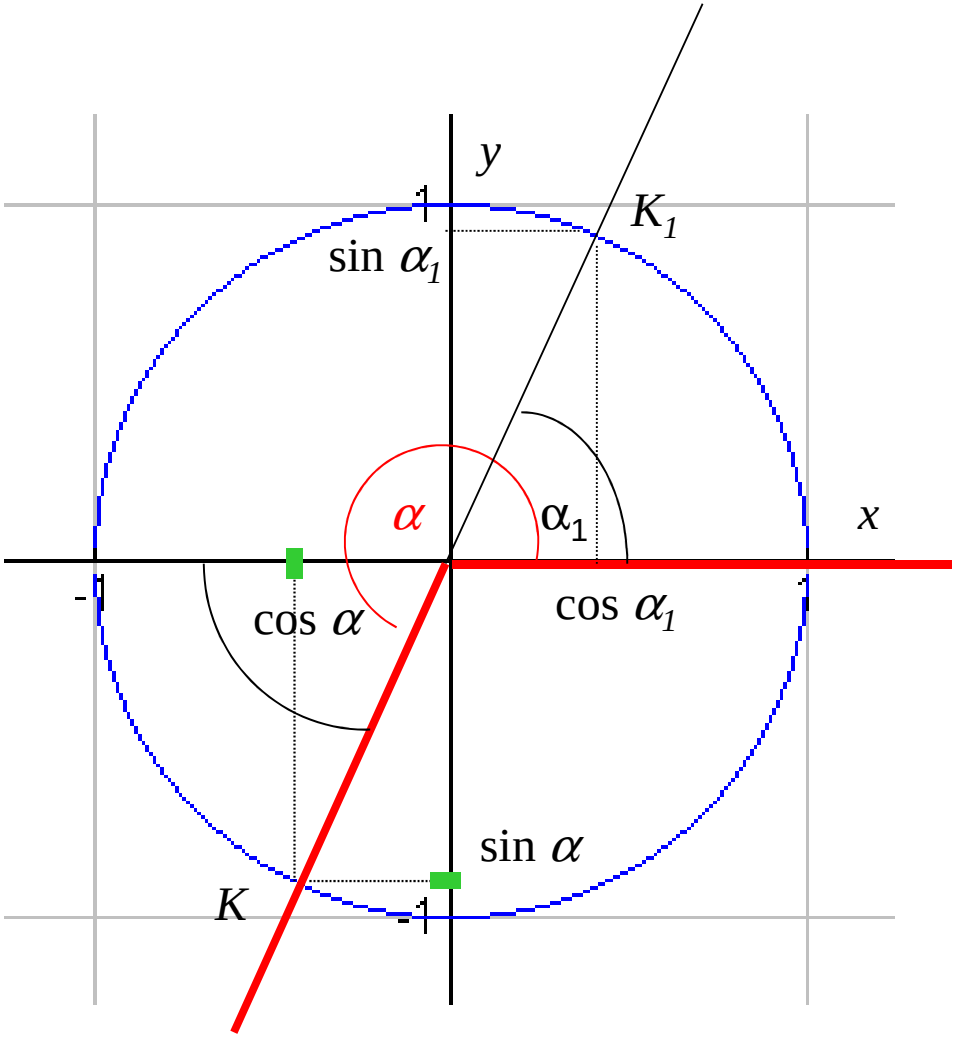
$\cos\alpha = -\cos\alpha_1$

Např.:

$\sin 117° = \sin 63°$

$\cos 178° = -\cos 2°$

III. kvadrant



$180° < \alpha < 270°$ (ve stupních)

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ (v radiánech)

$\alpha = 180° + \alpha_1$ (ve stupních)

$\alpha = \pi + \alpha_1$ (v radiánech)

$\sin\alpha = -\sin\alpha_1$

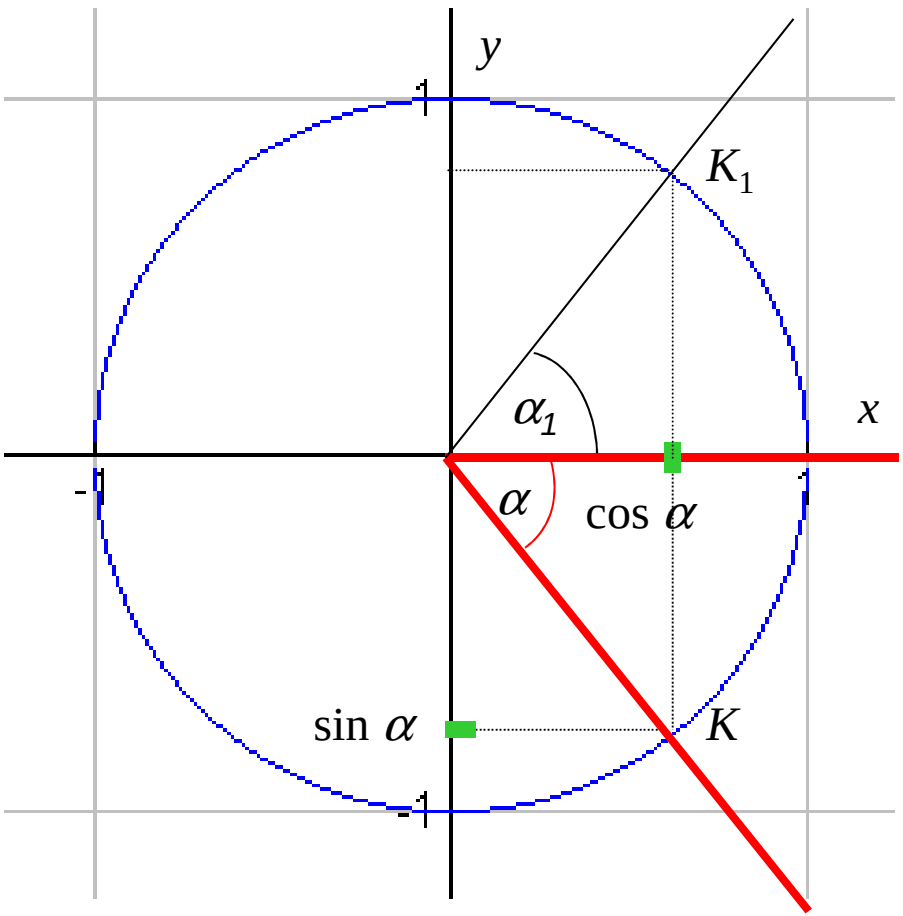
$\cos\alpha = -\cos\alpha_1$

Např.:

$\sin 220° = -\sin 40°$

$\cos 251° = -\cos 71°$

IV. kvadrant



$270° < \alpha < 360°$ (ve stup.)

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ (v radiánech)

Lépe:

$-90° < \alpha < 0°$

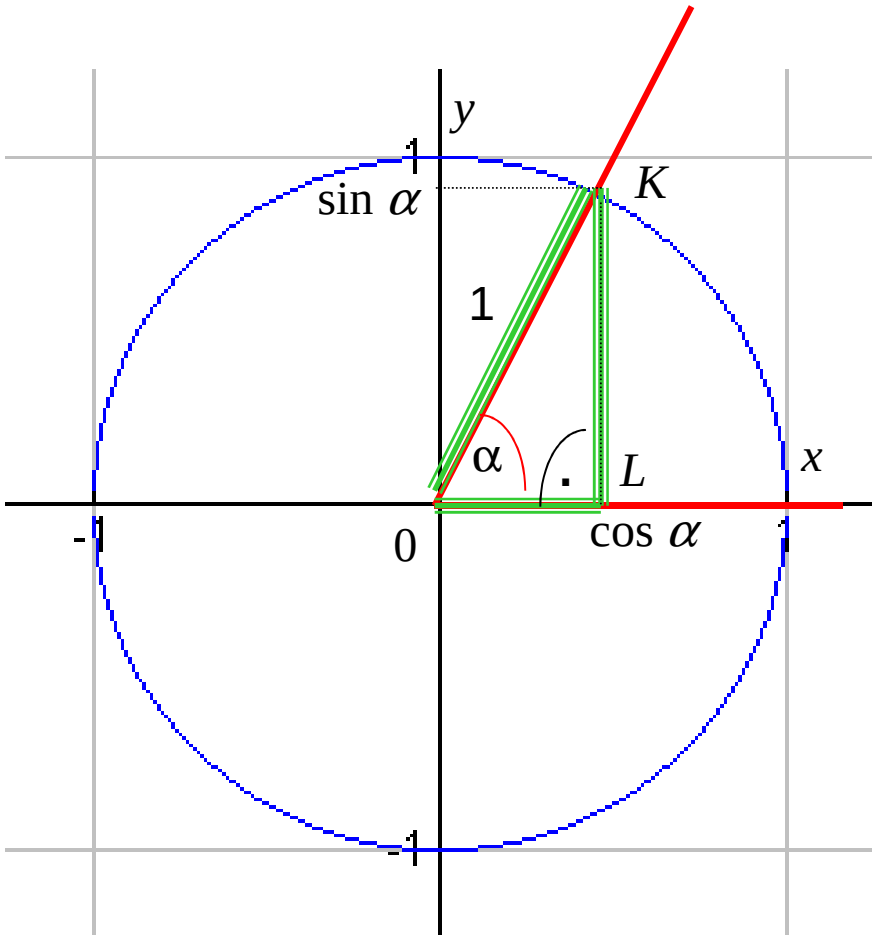
$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

$\alpha = -\alpha_1$

$\sin\alpha = -\sin\alpha_1$

$\cos\alpha = \cos\alpha_1$

Vztah mezi funkcemi sinus a kosinus



Ve všech čtyřech kvadrantech platí:

$$KL^2 = \sin^2 \alpha$$

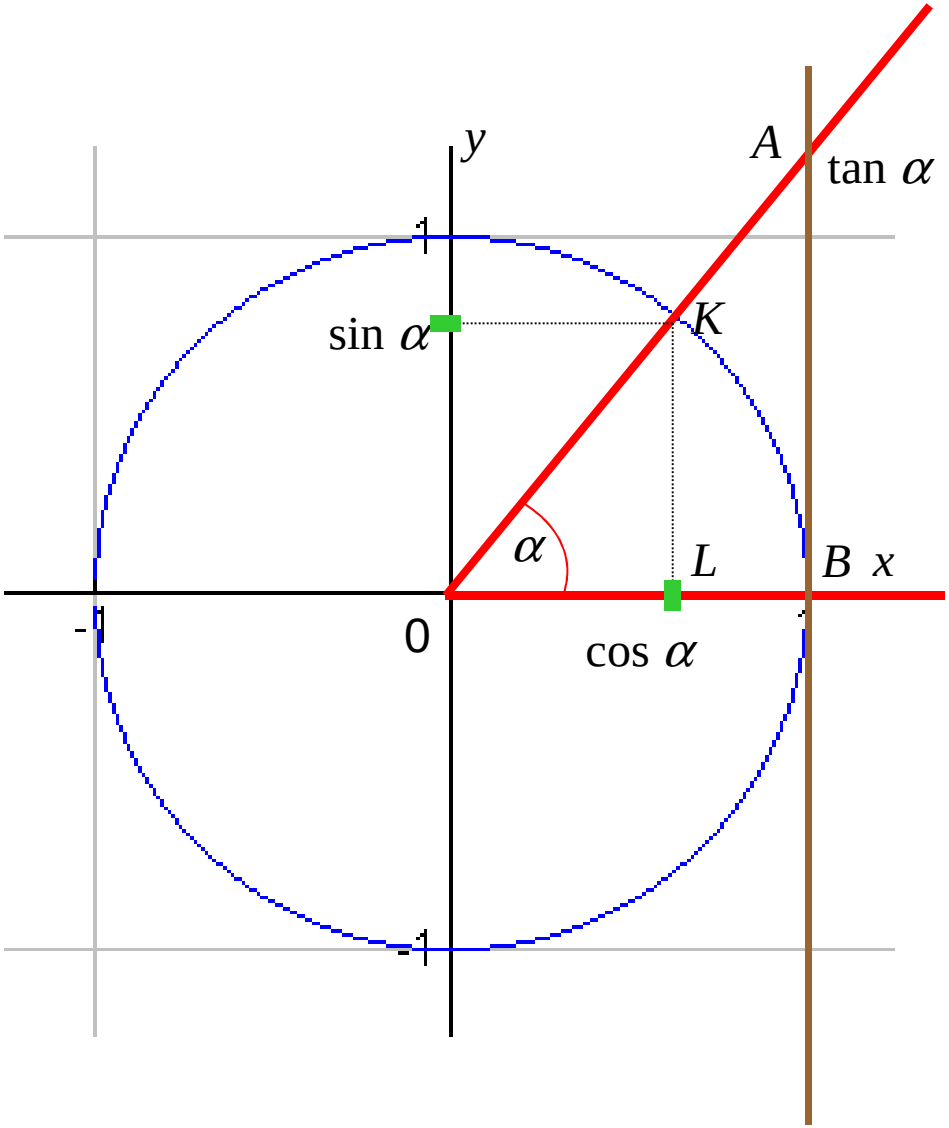
$$OL^2 = \cos^2 \alpha$$

$$|KO| = 1 \ldots KO^2 = 1$$

Podle Pythagorovy věty dostáváme:

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

Definice funkce tangens



$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\cos\alpha \neq 0$$

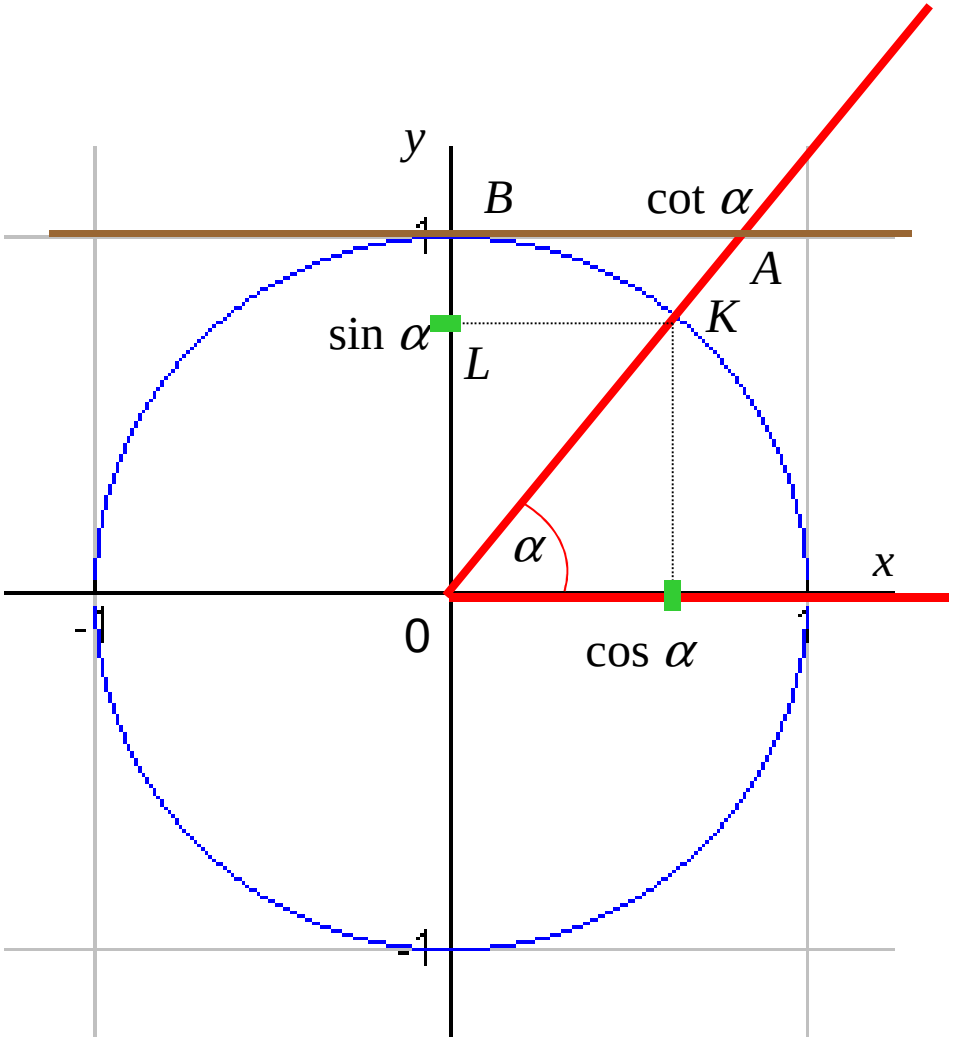
$$\alpha \neq 90^o + k \cdot 180^o$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$\Delta OKL \sim \Delta OAB:$$

$$\tan\alpha = \frac{|KL|}{|OL|} = \frac{|AB|}{|OB|} = \frac{|AB|}{1} = |AB|$$

Definice funkce kotangens



$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$\sin\alpha \neq 0$$

$$\alpha \neq k \cdot 180^o$$

$$\alpha \neq k \cdot \pi$$

$$\Delta OKL \sim \Delta OAB:$$

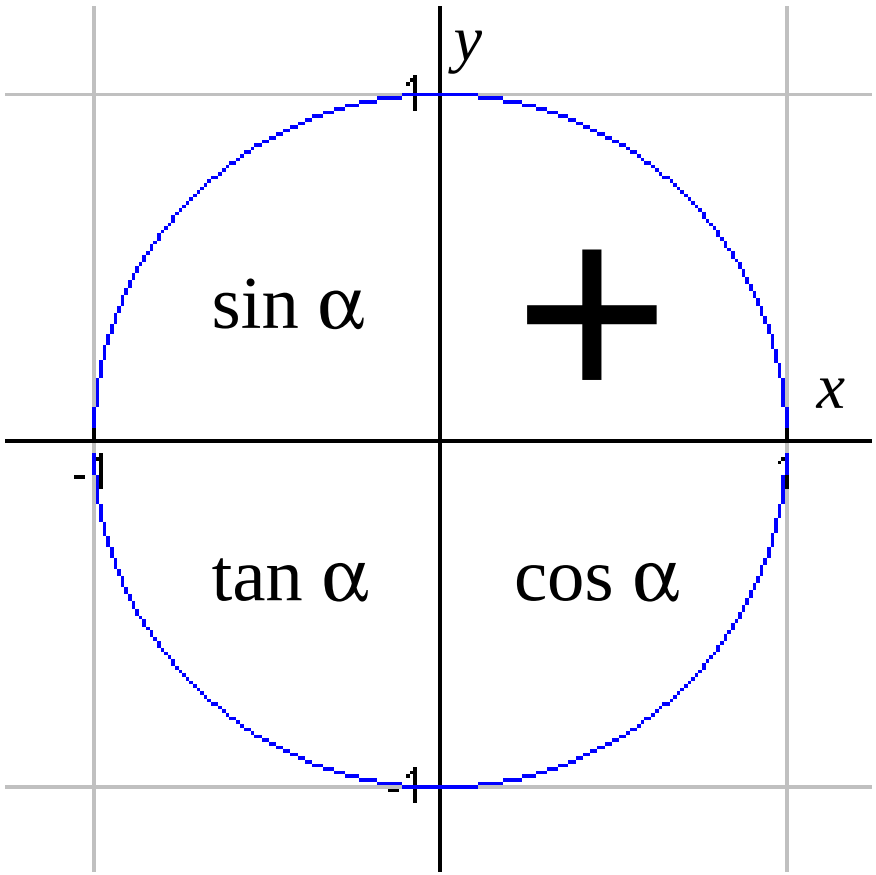
$$\cot\alpha = \frac{|KL|}{|OL|} = \frac{|AB|}{|OB|} = \frac{|BA|}{1} = |BA|$$

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

Znaménka goniometrických funkcí v kvadrantech

kvadrant	sin	cos	tan	cot
I.	+	+	+	+
II.	+	–	–	–
III.	–	–	+	+
IV.	–	+	–	–

Jiná pomůcka



V prvním kvadrantu mají funkce sinus, kosinus i tangens (kotangens) kladnou hodnotu.

Sinus je kladný ještě v kvadrantu druhém,

tangens ve třetím

a kosinus ve čtvrtém.