evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt:	MO-ME-N-T MOderní MEtody s Novými Technologiemi
Reg.č.:	CZ.1.07/1.5.00/34.0903
Operační program:	Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Škola:	Hotelová škola, Vyšší odborná škola hotelnictví a turismu a Jazyková škola s právem státní jazykové zkoušky Poděbrady
Tematický okruh:	Exponenciální rovnice 1
Jméno autora:	Mgr. Karel Lhotský
Datum:	30. listopadu 2013
Ročník:	2. ročník HŠ
Anotace:	Učební materiál určený nejen k výkladu v hodinách matematiky, ale především k samostudiu, popřípadě k samostatnému opakování a procvičování učiva

Exponenciální rovnice 1

řešené porovnáním mocnin
o stejných základech

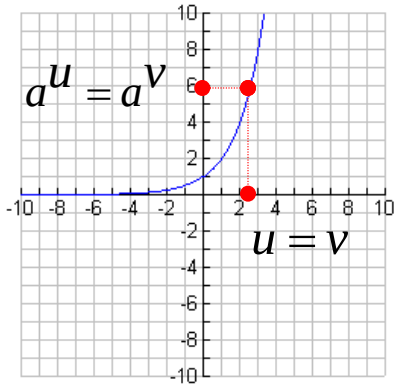
Exponenciální funkce: $y = a^x$

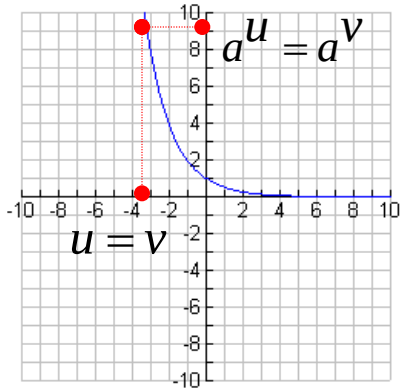
Pro a > 1 je exponenciální funkce rostoucí,
pro 0 < a < 1 klesající.

Jestliže se rovnají funkční hodnoty (mocniny), musí se rovnat i hodnoty exponentu.

$a > 0$, $a \neq 1$, $u \in R$, $v \in R$:

$a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$





Příklad 1: $7^{3x-1} = 7^{2x+5}$

$$3x-1=2x+5$$

$$3x-2x=5+1$$

$$x=6$$

$$K=\{6\}$$

Rovnají se mocniny, musí se rovnat i exponenty.

Řešíme lineární rovnici.

Rovnice má jeden kořen.

Zkouškou ověříme správnost řešení:

$$L=P=7^{17}$$

Příklad 2: $2^{x^2-6} = 8$

$$2^{x^2-6} = 2^3$$

$$x^2 - 6 = 3$$

$$x^2 = 9$$

$$x_{1,2} = \pm 3$$

$$K = \{\pm 3\}$$

Číslo 8 zapíšeme jako třetí mocninu čísla 2.

Rovnají se mocniny, musí se rovnat i exponenty.

Řešíme ryze kvadratickou rovnici.

Zkouškou ověříme správnost řešení.

Příklad 3: $\left(\frac{5}{3}\right)^{3+x} = 0{,}6^{x-2}$

$$\left(0{,}6^{-1}\right)^{3+x} = 0{,}6^{x-2}$$

$$0{,}6^{(-1)\cdot(3+x)} = 0{,}6^{x-2}$$

$$(-1)\cdot(3+x) = x-2$$

$$-3-x = x-2$$

$$-2x = 1$$

$$x = -0{,}5$$

$$K = \{-0{,}5\}$$

Základy mocnin na obou stranách rovnice jsou navzájem převrácená čísla:

$$\frac{5}{3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = 0{,}6^{-1}$$

Dále řešíme jako předchozí příklady.

Příklad 4 : $5^{x^2-7x+6,5} = \sqrt{5}$

$$5^{x^2-7x+6,5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$x^2-7x+6,5 = 0,5$$

$$x^2-7x+6 = 0$$

$$(x-6)(x-1)=0$$

$$x_1=6;\ x_2=1$$

$$K=\{1;6\}$$

Podle vlastností druhé odmocniny platí:

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

Porovnáme exponenty a řešíme kvadratickou rovnici.

Příklad 5: $8^{3x-1} \cdot 2^{2x} = 16^{x+8}$

$$\left(2^3\right)^{3x-1} \cdot 2^{2x} = \left(2^4\right)^{x+8}$$

$$2^{3\cdot(3x-1)} \cdot 2^{2x} = 2^{4\cdot(x+8)}$$

$$2^{(9x-3)+2x} = 2^{4x+32}$$

$$11x-3 = 4x+32$$

$$7x = 35$$

$$x = 5$$

$$K = \{5\}$$

Převedeme všechny mocniny na základ 2.

Dále využijeme vzorec pro součin mocnin o stejném základu:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Potom už postupujeme jako v předchozích příkladech.

Příklad 6: $\sqrt[x]{2^{x+2}} = \sqrt[3]{32} \;\; ; x \in N$

$$2^{\frac{x+2}{x}} = 2^{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{x+2}{x} = \frac{5}{3}$$

$$3(x+2) = 5x$$

$$3x+6 = 5x$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

$$K = \{3\}$$

Využijeme převedení odmocnin na mocniny s racionálním exponentem:

$$\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$$

$$\sqrt[x]{2^{x+2}} = 2^{\frac{x+2}{x}}$$

$$\sqrt[3]{32} = 2^{\frac{5}{3}}$$

Dále postupujeme jako v předchozích příkladech.

Příklady k procvičení (1):

1. $6^{2x+5} = 6^{-x-1}$ $\quad K = \{-2\}$
2. $\pi^{x^2+7} = \pi^{2\cdot(x+3)}$ $\quad K = \{1\}$
3. $\sqrt{3}^{x^2+2x} = \sqrt{3}^{2x+4}$ $\quad K = \{\pm 2\}$
4. $2^x = 128$ $\quad K = \{7\}$
5. $7^x = 49$ $\quad K = \{2\}$
6. $3^x = 27$ $\quad K = \{3\}$
7. $5^x = \frac{1}{25}$ $\quad K = \{-2\}$
8. $3^{2x} = \frac{1}{27}$ $\quad K = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

Příklady k procvičení (2):

9. $4^x = 32$ $\quad K = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$

10. $\left(\frac{1}{2} \right)^x = 64$ $\quad K = \{-6\}$

11. $\left(\frac{1}{4} \right)^{3x-2} = 2^5$ $\quad K = \left\{ -\frac{1}{6} \right\}$

12. $\left(\frac{4}{3} \right)^{2-x} = 0{,}75^{7x-4}$ $\quad K = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

13. $10^{x^2+3x} = 1$ $\quad K = \{-3;0\}$

Příklady k procvičení (3):

14. $0{,}5^{x^2-4} = 1$ $\quad K = \{\pm 2\}$

15. $13^{2x^2+5x-3} = 1$ $\quad K = \{0{,}5; -3\}$

16. $6^{x^2-3x+2{,}5} = \sqrt{6}$ $\quad K = \{1; 2\}$

17. $2^{x^2-6x-2{,}5} = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\quad K = \{-1; 7\}$

18. $2^{x^2+2x-8} = 4^{x^2-3x+2}$ $\quad K = \{2; 6\}$

19. $25^{3x-1} = \left(\frac{1}{125}\right)^{2x+1}$ $\quad K = \left\{-\frac{1}{12}\right\}$

Příklady k procvičení (4):

20. $\left(\frac{1}{8}\right)^{4x+3} = 32^{x-1}$ $\qquad K = \left\{-\frac{4}{17}\right\}$

21. $2^{x+1} \cdot 3^{x} = 72$ $\qquad K = \{2\}$

22. $2^{2x} \cdot 3^{x+1} = 36$ $\qquad K = \{1\}$

23. $2^{3x} \cdot 4^{3x-3} = 8^{2x+1}$ $\qquad K = \{3\}$

24. $125^{x} \cdot 5^{3x-2} = 25^{2x+11}$ $\qquad K = \{12\}$

25. $3^{7} \cdot 27^{2x-3} = 81^{x-5}$ $\qquad K = \{-9\}$

Příklady k procvičení (5): $x \in N$

26. $\sqrt[x+5]{8} = \sqrt[x]{16}$ $\quad K = \emptyset \quad (-20 \notin N)$

27. $\sqrt[x-4]{9} = \sqrt[x]{81}$ $\quad K = \{8\}$

28. $\sqrt[x-1]{3^{x+1}} = \sqrt{27}$ $\quad K = \{5\}$

29. $\sqrt[x]{3^{4x+4}} = 9^{x+3}$ $\quad K = \{1\} \quad (-2 \notin N)$

30. $\sqrt[x]{4^{4x-1}} = 2^{2x+3}$ $\quad K = \{2\} \quad (0{,}5 \notin N)$

Příklady k procvičení (6):

31. $25^{\sqrt{x-1}} = 125 \cdot 5^{\sqrt{x-1}}$ $K = \{10\}$

32. $2^{\sqrt{2x-1}} \cdot 64 = 16^{\sqrt{2x-1}}$ $K = \{2,5\}$

33. $3^{\sqrt{5x+1}} \cdot 81^2 = 27^{\sqrt{5x+1}}$ $K = \{3\}$

34. $2^{\sqrt{x+5}} = 4 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$ $K = \{-1\}$

35. $3^{\sqrt{x+3}} = 9 \cdot 3^{\sqrt{x-5}}$ $K = \{6\}$

36. $5^{\sqrt{x+20}} = 25 \cdot 5^{\sqrt{x}}$ $K = \{16\}$